

# Problem Set 15: 关系的性质

## (提交截止时间: 4 月 15 日 10:00)

### Problem 1

确定定义在所有人的集合上的关系  $R$  是否是自反的, 对称的, 反对称的和传递的, 其中  $(a, b) \in R$  当且仅当

- (1)  $a$  比  $b$  高.
- (2)  $a$  和  $b$  同名.
- (3)  $a$  和  $b$  在同一天出生.
- (4)  $a$  和  $b$  有共同的祖父母.

### Problem 2

找出下面定理证明中的错误.

“定理”: 设  $R$  是集合  $A$  上的对称的和传递的关系, 则  $R$  是自反的.

“证明”: 设  $a \in A$ . 取元素  $b \in A$  使得  $(a, b) \in R$ . 由于  $R$  是对称的, 所以有  $(b, a) \in R$ . 现在使用传递性, 由  $(a, b) \in R$  和  $(b, a) \in R$  可以得出  $(a, a) \in R$ .

### Problem 3

设  $R$  是集合  $A$  上的自反关系, 证明对所有正整数  $n$ ,  $R^n$  也是自反的.

### Problem 4

设  $R_1$  和  $R_2$  是集合  $A$  上的关系, 由以下矩阵表示.

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求表示下述关系的矩阵.

$$(1) R_1 \cup R_2$$

$$(2) R_1 \cap R_2$$

$$(3) R_2 \circ R_1$$

$$(4) R_1 \circ R_1$$

$$(5) R_1 \oplus R_2$$

## Problem 5

设  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $R$  是  $A$  上的关系, 且  $R = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle e, f \rangle\}$ , 设  $R^* = t(s(r(R)))$ , 则  $R^*$  是  $A$  上的等价关系.

(1) 给出  $R^*$  的关系矩阵.

(2) 写出商集  $A/R^*$ .

## Problem 6

由  $n$  个元素组成的集合上, 有多少个关系是:

a) 对称的?

b) 反对称的?

c) 非对称的?

d) 反自反的?

e) 自反的 and 对称的?

f) 既不是自反的也不是反自反的?

## Problem 7

设  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的自反关系. 证明  $R \cap S$  和  $R \cup S$  是自反的.

## Problem 8

集合  $\{1, 2, 3, 4\}$  上的关系  $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$  具有哪些性质?

## Problem 9

证明: 集合  $A$  上的关系  $R$  是反对称的, 当且仅当  $R \cap R^{-1}$  是恒同关系  $I_A$  的子集.

## Problem 10

设  $R$  是集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  上的关系, 定义如下:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

a) 画出关系  $R$  的关系图.

b) 写出关系  $R$  的关系矩阵.

c) 求  $R$  的自反闭包  $r(R)$ .

- d) 求  $R$  的对称闭包  $s(R)$ .
- e) 求  $R$  的传递闭包  $t(R)$  (可自学后使用沃舍尔算法) .

## Problem 11

考虑集合  $A = \{a, b, c\}$  上的以下关系:

$$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$$

$$R_2 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$$

- a) 判断  $R_1$  和  $R_2$  分别具有哪些性质 (自反、对称、反对称、传递) .
- b) 求  $R_1 \cap R_2$  并分析其性质.
- c) 求  $R_1 \circ R_2$  并分析其性质.
- d) 证明或反驳: 如果两个关系都是等价关系, 那么它们的并也是等价关系.
- e) 证明或反驳: 如果两个关系都是等价关系, 那么它们的交也是等价关系.

## Problem 12

设  $R$  是正整数集合  $\mathbb{Z}^+$  上的关系, 定义为:

$$R = \{(a, b) \mid \exists k \in \mathbb{Z}^+ \text{ 使得 } b = a^k\}$$

- a) 证明  $R$  是传递的.
- b)  $R$  是自反的吗? 证明你的结论.
- c)  $R$  是对称的吗? 证明你的结论.
- d) 求  $R$  的逆关系  $R^{-1}$ .
- e) 将  $R$  限制在集合  $\{2, 4, 8\}$  上, 画出关系图并求传递闭包.